Liczba pi – perła w koronie Królowej nauk

Jan Koroński
Instytut Matematyki PK

Dzień liczby π - 14 marca 2019
Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki
Politechniki Krakowskiej

Rok 2019 uchwałą Senatu Rzeczypospolitej Polski jest rokiem matematyki

- W takiej sytuacji zapytajmy co to jest matematyka? Jak ją dzisiaj rozumieć?
- Współcześnie matematykę można określić jako zbiór **definicji**, **twierdzeń**, **dowodów twierdzeń** i **wzajemnych relacji**, jakie zachodzą pomiędzy wyżej wyszczególnionymi kategoriami matematycznymi.
- Jest rzeczą od dawna wiadomą, że nauki fizyczne i techniczne korzystają z metod matematyki w istotny sposób.

Matematyka a inne dziedziny nauki

- Z czasem przekonujemy się, że rola matematyki nieustannie wzrasta i swymi ideami przenika inne jeszcze dziedziny nauki. Obecnie jesteśmy świadkami gwałtownego procesu przenikania metod matematycznych do nauk biologicznych, medycznych i nauk społeczno-ekonomicznych. Daje się również zauważyć stosowanie matematyki w naukach humanistycznych, a nawet w teologii.

Jaka matematyka była dawniej?

- Tymczasem jeszcze niewiele ponad trzysta pięćdziesiąt lat temu geometria, uprawiana jeszcze w starożytności, stanowiła główny trzon matematyki. Geometria euklidesowa, modyfikowana tylko w niewielkim stopniu, dominowała przez dwadzieścia wieków. Z czasem jej surowy, aksjomatyczny i ściśle dedukcyjny styl rozumowania został wyparty przez rozumowania indukcyjne i niekiedy intuicyjne, a pojęcia czysto geometryczne zostały zastąpione przez liczbę i operacje algebraiczne. W ten sposób powstały geometria analityczna, analiza matematyczna i mechanika.

Matematyka klasyczna

- Matematyka klasyczna, która powstawała w XVII w., zachowała swe znaczenie do dziś. Fundamentem matematyki klasycznej jest pojęcie funkcji i granicy. W XIX wieku dokonano uściślenia wielu pojęć matematyki klasycznej. W dwóch ostatnich wiekach nastąpił gwałtowny rozwój matematyki, co zaowocowało zjawiskiem specjalizacji i – niestety – izolacji, szczególnie ze środowiskiem stosującym metody matematyczne w praktyce. Wzajemne zrozumienie nawet pomiędzy przedstawicielami różnych dziedzin matematyki zostało utrudnione.

Znaczenie – cel matematyki

- Jak się wydaje, celem matematyki jest postępująca abstrakcja, logicznie ścisła dedukcja oparta na układach aksjomatycznych i coraz to szersze uogólnienia. Jednakże matematyka nie ma monopolu na abstrakcję. Przecież pojęcia fizyki, takie jak np. masa, prędkość, siła, napięcie i natężenie, są to abstrakcyjne idealizacje rzeczywistości fizycznej. Pojęcia matematyczne, takie jak np. punkt, przestrzeń, liczba czy funkcja, są tylko nieco bardziej abstrakcyjne.

Istota matematyki

- Istotą matematyki jest badanie i porządkowanie treści matematycznych oraz uwidacznianie struktury nowych teorii matematycznych. Nowe treści matematyczne wchodzą do matematyki poprzez nowe definicje. Twierdzenia przetwarzają treści zawarte w definicjach i ewentualnie porządkują je. Każda teoria matematyczna rozpoczyna się od konkretnej i szczególnej podstawy, a następnie poprzez abstrahowanie staje się abstrakcyjna.

Sens i praktyczne znaczenie matematyki

- W matematyce właściwy proces rozwoju, od indywidualnej i konkretnej treści, poprzez abstrakcję, z powrotem do tego co konkretne i szczególne, nadaje treściom matematycznym sens i praktyczne znaczenie. Aksjomatyzacja poprzez oderwanie się od konkretnej, szczegółowej i jednostkowej sytuacji ukazuje istotę struktury rozważanych obiektów
  i pozwala dokonywać porównań z innymi obiektami, gdyż ukazanie struktury ujawnia cały ładunek informacji o obiektach, które w połączeniu z odpowiednimi aksjomatami tworzą daną strukturę matematyczną.

Matematyka teoretyczna, a stosowana

- Od jakiegoś czasu utrzymuje się podział na matematykę „czystą” i „stosowaną”. W odróżnieniu od matematyki czystej, gdzie można dowolnie manewrować założeniami, tak aby coś tam wyszło, w badaniach związanych z zastosowaniami matematyki rozważanego problemu nie można swobodnie modyfikować lub pomijać. Należy uzyskać wiarygodne rozwiązanie. Jednakże niejednokrotnie zanim do tego dojdzie, bywa tak, że trzeba zastosować wyrafinowany abstrakcyjnie aparat matematyczny z czystej matematyki (pozornie niestosowalny w praktyce), który ukaże jak rozważany problem postawić (przeformułować), aby uzyskać model matematyczny odpowiadający opisywanej rzeczywistości lub by otrzymany model był lepszy w kontekście trudności związanych z otrzymaniem rozwiązania rozważanego problemu.

Definiowanie nowych obiektów matematycznych w celu rozwiązania badanych problemów

- Niekiedy nawet należy zdefiniować nowe obiekty matematyczne, aby osiągnąć wyżej sformułowany cel.
- Przykładem takiej sytuacji jest rachunek krakowianowy Tadeusza Banachiewicza, po raz pierwszy sformułowany w 1922 r., który pozwolił jego twórcy rozwiązać wiele trudnych problemów.
- Większość z wybitnych osiągnięć tego wybitnego polskiego uczonego stało się możliwe dzięki wynalezionemu przez niego rachunkowi krakowianowemu (pewnej odmianie rachunku macierzowego).

Przykłady sukcesów Banachiewicza uzyskanych poprzez krakowiany

- Algorytm Banachiewicza metody najmniejszych kwadratów w astronomii (w pewnym sensie) wyrugował algorytm Gaussa. Algorytm Banachiewicza nie wymaga rachunku różniczkowego, przez co staje się szerzej stosowalny.
- Wyprowadzony przez Banachiewicza ogólny wzór poligonometrii sferycznej, bezskutecznie poszukiwany przez matematyków około sto lat, zastosowany do trygonometrii sferycznej uwidocznił nieznane wcześniej, a istotne osobliwości jej wzorów, które uszły uwadze matematyków tej miary co Gauss, Euler, Monge, Delambre i in. Wzory poligonometrii sferycznej pozwalają rozwiązywać wielokąty sferyczne bezpośrednio bez potrzeby rozkładania ich na poszczególne trójkąty sferyczne.

O najsłynniejszych stałych matematyki

- Pierwsze pięć najsławniejszych stałych matematyki to: 0 (zero), 1 (jeden) oraz *i* czyli, tzw. jednostka urojona. Kolejnymi jest liczba π oraz podstawa logarytmów naturalnych *e*, szóstą stała Eulera-Mascheroniego , a siódmą stała Apéry'ego, czyli (wartość bardzo ważnej funkcji specjalnej - funkcji dzeta Riemanna dla zmiennej równej 3), Pozostałe dalsze stałe to: Catalana, Landaua, Chińczyna, Feigenbauma i in. (Tak naprawdę każdy, jak się postara, może mieć jakąś swoją stałą).

W matematyce piękno jest prawdziwe, a prawda piękna

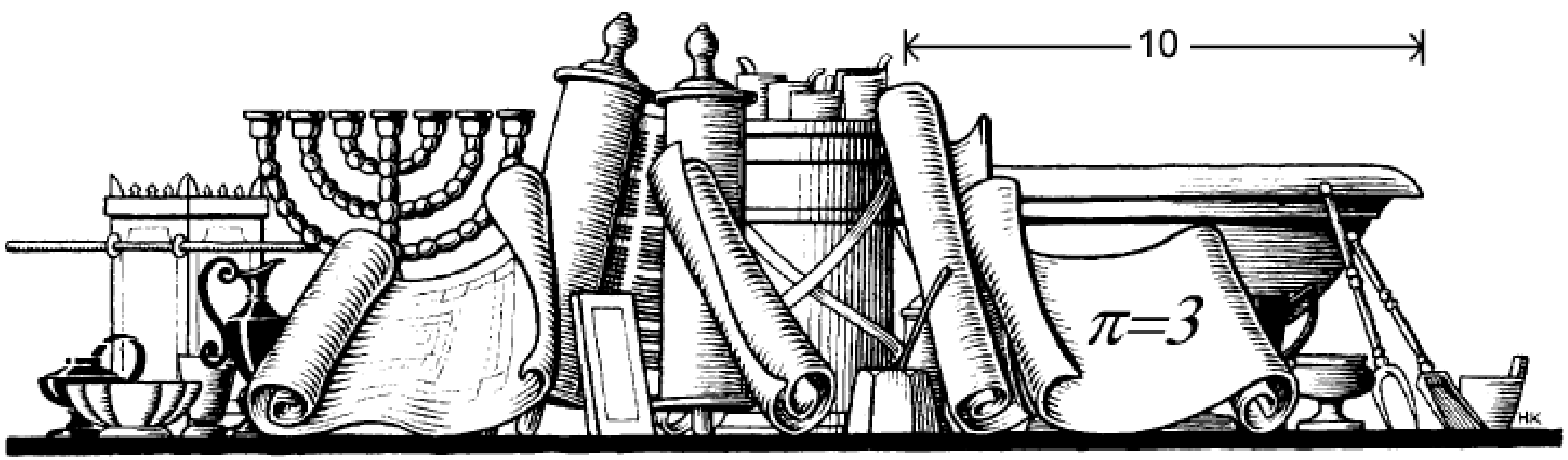
- Wymienione stałe cechują się tym, że są piękne i prawdziwe (oraz często użyteczne). Chciałoby się, aby zawsze i wszędzie piękno było prawdziwe, a prawda piękna. Niestety w życiu zbyt często tak nie jest. Ale w teorii tak bywa i to zwykle prawie zawsze. Przykładem tego może być fakt, że wymienione pierwsze pięć najsłynniejszych stałych matematycznych wiąże następująca piękna i prawdziwa zależność (równość): $e^{i\pi}+1=0,$ z których liczba π jest niewątpliwie prawdziwą i jedną najpiękniejszych pereł matematyki .

O przybliżeniach liczby π

- **Około 1000 lat p.n.e.** Przedmiotem poniższego fragmentu *I Księgi królewskiej* Biblii jest jedno z najstarszych znanych oszacowań dla (perły w koronie Królowej nauk) jednej z najsłynniejszej stałej matematycznej – liczby pi.
- *[Salomon] Sporządził też kadź odlewną wyobrażającą morze, okrągłą, długości dziesięciu łokci od krawędzi do krawędzi; […] obwód zaś jej wynosił trzydzieści łokci.*
- *(1 Krl. 7, 23; por. też 2 Krn. 4, 2-5)*

Morze miedziane

- Zacytowany fragment Biblii jest charakterystyką tzw. „morza miedzianego” – wielkiego zbiornika wody na kapłańskim dziedzińcu świątyni Salomona w Jerozolimie. Wynika z tego tekstu przybliżenie liczby π przez 3.



Dalsze przybliżenia liczby π

- Przed mądrym królem Salomonem, który jednak i z pustego nie potrafił nalać,
- **ok. roku 2000 p.n.e.,** Babilończycy, wartość liczby π przybliżali ułamkiem 3 i 1/8$\approx$3,125,
- **a ok. XVI w p.n.e.** Egipcjanie (256/81 $\approx$ 3,1604, czyli $(16/9)^2 \approx$ 3,1604)
- i jeszcze **ok. XII wieku p.n.e**. jeszcze Chińczycy szacowali podobnie jak Salomon także przez 3.
- **250 lat p.n.e.** Archimedes (287-212 p.n.e.), posługując się swoją metodą wielokątów wpisywanych oraz opisywanych na okręgu uzyskał wynikającą z tej metody przybliżenie: 3 i 10/71 < π < 3 i 1/7, czyli: 3,1408 < π < 3,1428 oraz (22/7).

Przybliżenia liczby π cd

- **139 n.e.** Chang Heng $\sqrt{10} = 3{,}162277\ldots$
- **170 n.e.** Klaudiusz Plomeusz 377/120 $\approx$ 3,1416…
- **III wiek n.e.** Wang Fan 142/45 $\approx$ 3,155…
- **III wiek n.e.** liu Huej 157/50 $\approx$ 3,14
- **V wiek n.e.** Tse Chung-chin 355/113 < π < 22/7
- **Urodzony 46 n.e.** Ārybhata (355/113)=3,141592… oraz (62832/20000)=3,14116…
- **1596 r. n.e.** Ludolf van Ceulen wyznaczył π z dokładnością do 36 miejsc po przecinku
- **1685 r. n.e.** Adam Adamandy Kochański $\pi \approx (1/3)\sqrt{6(20-3\sqrt{3})} = 3{,}1388147\ldots$
- **1685 r. n.e.** John Wallis: rozwinięcie π w ułamek łańcuchowy, a także np. W. Brouncker 1600 i L. Euler 1755.
- **1713 r. n.e.** Ching-yun $\pi \approx$ 3,14159265358979323 8

O niewymierności i przestępności liczby π

- **W roku 1700**, Lambert z Legendre'm pokazali, że π jest niewymierna – nie jest więc ilorazem jakichkolwiek dwu liczb całkowitych, zaś w sekwencji kolejnych cyfr jej rozwinięcia nie ma żadnych prawidłowości.

- Potem badając własności liczby π , matematycy łudzili się jeszcze, że może ta liczba będzie mogła być przynajmniej rozwiązaniem jakiegoś równania algebraicznego z całkowitymi współczynnikami.

- **Jednak w roku 1882** Lindemann udowodnił, że liczba π jest tzw. liczbą przestępną, czyli że nie jest rozwiązaniem równania algebraicznego z całkowitymi współczynnikami . W ten sposób dowiódł też bezsensowności wszelkich prób realizacji marzeń starożytnych Greków – i wielu późniejszych matematyków chcących rozwiązać problem kwadratury koła.

Problem kwadratury koła

- (Kwadratura koła – problem polegający na skonstruowaniu kwadratu, którego pole równe jest polu danego koła przy użyciu wyłącznie cyrkla i linijki bez podziałki. Jest to jeden z trzech sformułowanych przez szkołę pitagorejską wielkich problemów starożytnej matematyki greckiej obok trysekcji kąta i podwojenia sześcianu.
- Trysekcja kata - polega na podziale kąta na trzy równe części jedynie przy użyciu cyrkla i linijki. W roku 1837 Pierre Wantzel udowodnił, że konstrukcja taka w ogólnym przypadku jest niewykonalna.
- Podwojenie sześcianu- jest to problem polegający na zbudowaniu sześcianu o objętości dwa razy większej niż dany.)

O wybranych wzorach (rozwinięciach w iloczyny i szeregi nieskończone) na liczbę π

- **1593** François Viète (1540-1603)

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\ldots$$

- **1655** John Wallis (1616-1703) (Wprowadził symbol nieskończoności: ∞)

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{11}\cdots$$

- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots$$

O wybranych wzorach (rozwinięciach w iloczyny i szeregi nieskończone) na liczbę π

- Isaac Newton (1642-1727)

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!!}=1+\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{7}\left(1+\frac{4}{9}\left(1+\frac{5}{11}(1+\ldots\right)\right)\right)\right)$$

- **(Lata dwudzieste XX w.)** Rozwinięcie Ramanujana (szybko zbieżne)

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{n!^4\,396^{4n}}$$

- W tym wzorze dodanie każdego kolejnego wyrazu sumy polepsza dokładność o 100 milionów razy, czyli z każdym składnikiem szeregu otrzymujemy dokładność o dalszych 8 cyfr znaczących (bo sto milionów, to jest dziesięć do potęgi ósmej).

O wybranych wzorach (rozwinięciach w iloczyny i szeregi nieskończone) na liczbę π

- **(Rok 1989)** Bracia David i Gregory Chudnovsky z Columbia University podali szybko zbieżny związek, z którego m.in. korzysta pakiet Mathematica™ Stevena Wolframa. Oto ten związek (ścisły związek):

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!(13591409 + 545140134n)}{(3n!) n!^3 \, 640320^{3n+3/2}}$$

- Już pierwszy wyraz tego szeregu daje 13 cyfr znaczących p, a dodanie każdego kolejnego wyrazu polepsza dokładność o dalszych kilkanaście cyfr (około 14 cyfr).

O wybranych wzorach (rozwinięciach w iloczyny i szeregi nieskończone) na liczbę π

- **Rok 1996** David H. Bailey, Jonathan M. Borwein, Peter B. Borwein and Simon Plouffe: *The Quest for Pi* (nie opublikowany raport CECM, Simon Frazier University, British Columbia, 25 June 1996; Opublikowano w **1997**) znaleźli nastepujący wzór na liczbę π:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) \left(\frac{1}{16} \right)^n$$

- Jest to rozwinięcie ścisłe i (w miarę) szybko zbieżne w szesnastkowym układzie pozycyjnym (każdy składnik sumy jest kolejną cyfrą szesnastkowego rozwinięcia liczby p *nie zmieniając przy tym cyfr poprzednich!*
- Występują także formuły przybliżające liczbę π wynikające z oszacowań pewnych całek oznaczonych.

Szybko zbieżne formuły przybliżające liczbę π wynikające z rozwinięcia funkcji arctg

- John Machin (1680-1751)

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$$

- **1730** S. Kingenstiern

$$\frac{\pi}{4} = 8\operatorname{arctg}\frac{1}{10} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239} - 4\operatorname{arctg}\frac{1}{515}$$

- **1896** F. C. W. Störmer

$$\frac{\pi}{4} = 44\operatorname{arctg}\frac{1}{57} + 7\operatorname{arctg}\frac{1}{239} - 12\operatorname{arctg}\frac{1}{682} + 24\operatorname{arctg}\frac{1}{12943}$$

- **1982** K. Takano

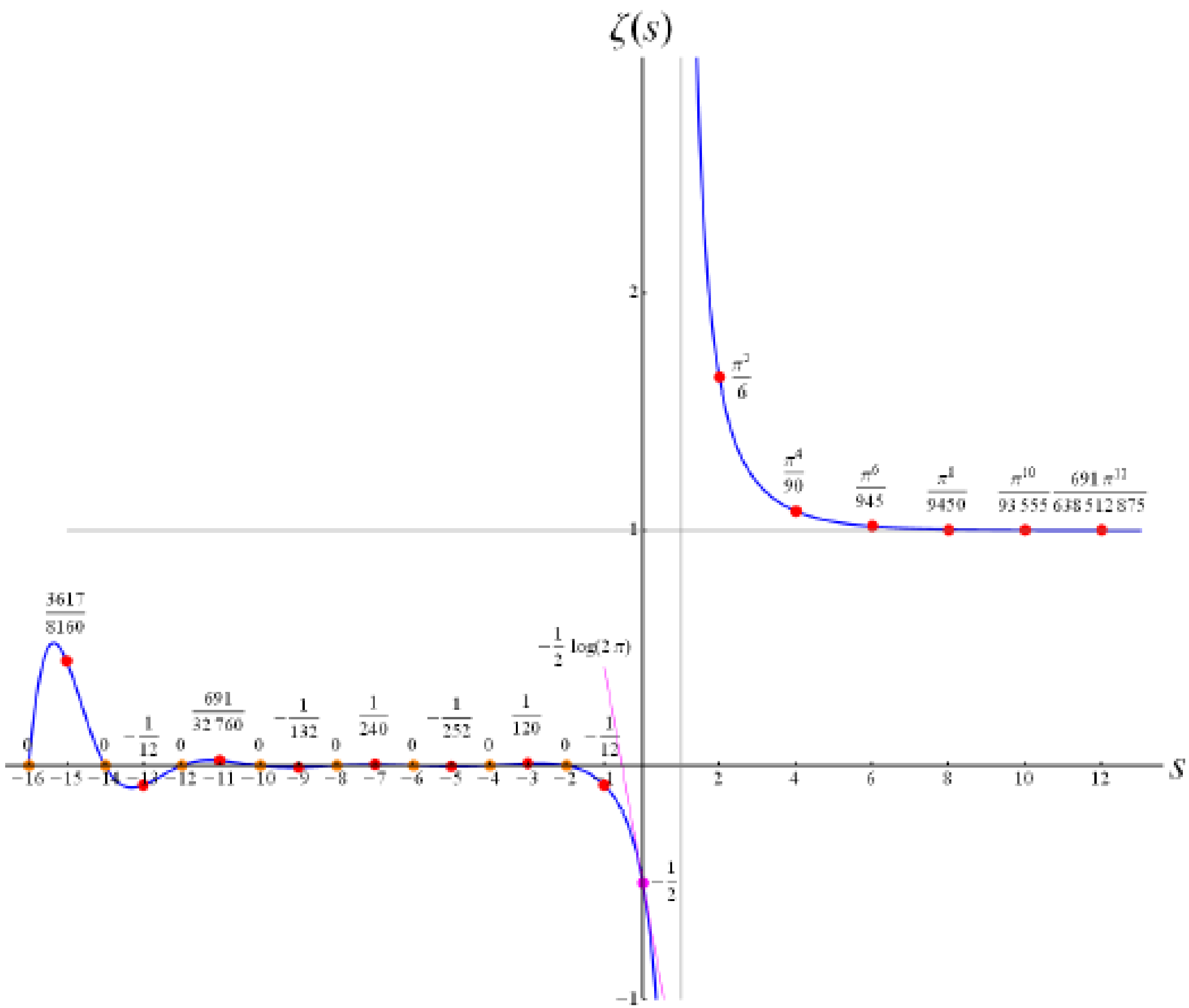
$$\frac{\pi}{4} = 12\operatorname{arctg}\frac{1}{49} + 32\operatorname{arctg}\frac{1}{57} - 5\operatorname{arctg}\frac{1}{239} + 12\operatorname{arctg}\frac{1}{110443}$$

Hipoteza Riemanna a liczba π

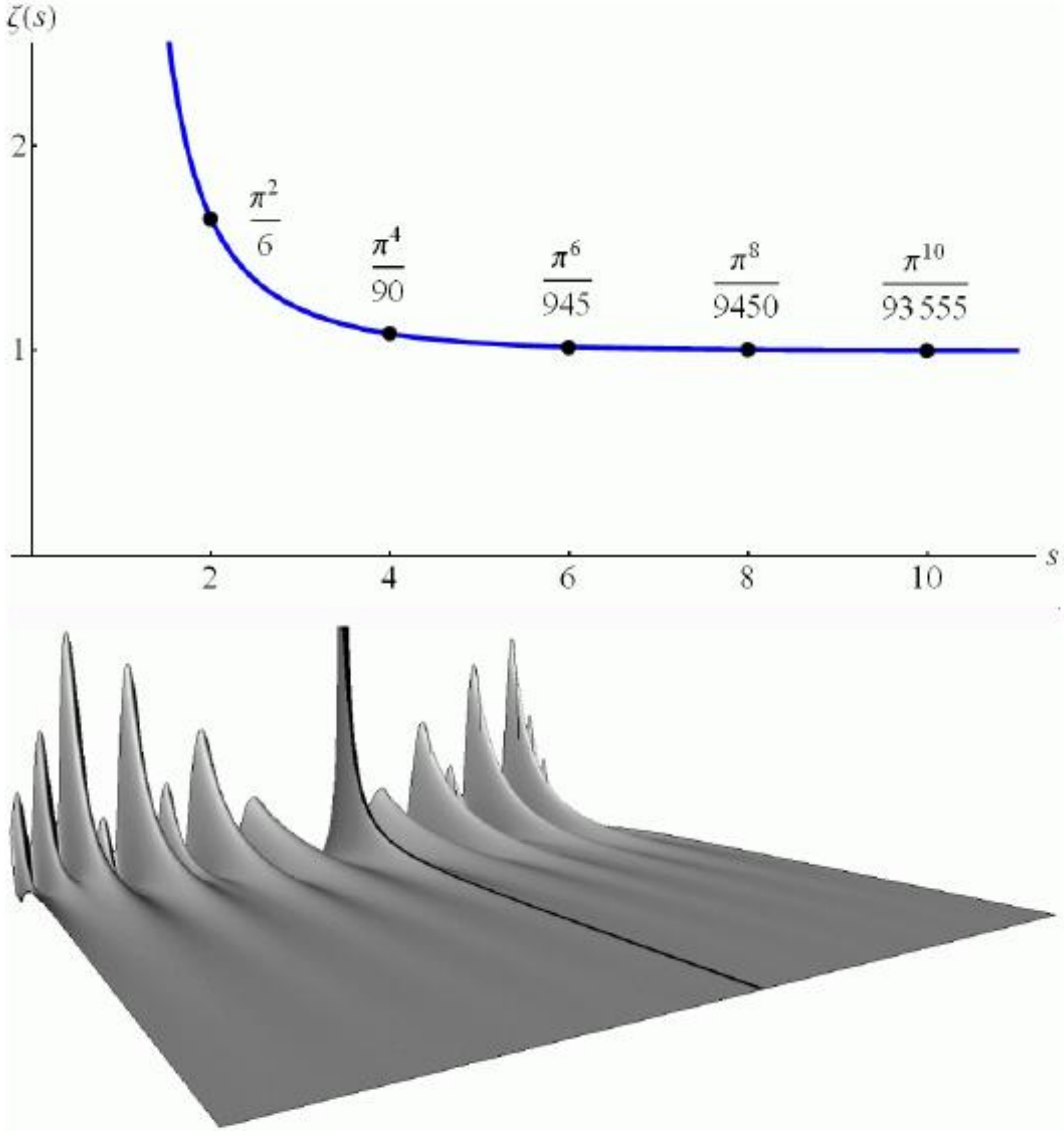
- **Hipoteza Riemanna** – sformułowana w 1859 roku hipoteza, dotycząca badanej przez niemieckiego matematyka Bernharda Riemanna funkcji dzeta. Jest jednym z największych nierozwiązanych problemów w matematyce. Mówi ona, że wszystkie tzw. nietrywialne zera (nierzeczywiste) tej funkcji mają część rzeczywistą równą ½. Problem ten ma duże znaczenie dla całej matematyki – w szczególności dla teorii liczb, ale również dla statystyki oraz fizyki. Jest jednym z problemów milenijnych, ogłoszonych przez Instytut Matematyczny Claya w roku 2000. Clay Mathematics Institute (CMI) ufundował nagrodę w wysokości miliona dolarów za dowód lub obalenie tej hipotezy. Hipoteza Riemanna jest ósmym problemem z listy problemów Hilberta.

Wizualizacja wartości funkcji dzeta Riemanna w dziedzinie liczb rzeczywistych widocznym biegunem w jedynce. (Rysunek pochodzi z powyżej cytowanej pracy K. Maślanki *On a certain new class of expansions for the Riemann zeta function*, Current Research in Mathematical and Computer Sciences II Publisher UWM, Olsztyn 2018, pp. 141-155 (ze str. 145)).

Widoczne są również pierwiastki rzeczywiste funkcji dzeta Riemanna.



Wizualizacja wartości funkcji dzeta Riemanna w dziedzinie liczb rzeczywistych dodatnich (górna część rysunku) oraz w półpłaszczyźnie zespolonej (dolna część rysunku). Czarna linia na dolnym wykresie odpowiada wykresowi z górnej części rysunku. (Rysunek pochodzi z powyżej cytowanej pracy K. Maślanki *On a certain new class of expansions for the Riemann zeta function*, Current Research in Mathematical and Computer Sciences II Publisher UWM, Olsztyn 2018, pp. 141-155 (ze str. 144)).



- **Stała struktury subtelnej, stała Plancka, prędkość światła i wartość ładunku elementarnego, a liczba pi**

  Autorowi prezentacji udało się wyprowadzić nową formułę na liczbę pi wyrażoną poprzez fundamentalne stałe fizyczne w wyniku niezwykle prostego i zaskakującego rozumowania matematycznego wychodząc z określenia stałej struktury subtelnej.

  Liczba pi jest iloczynem stałej struktury subtelnej, stałej Plancka i stałej prędkości świata; podzielonemu przez podwojony kwadrat wartości ładunku elementarnego (elektronu). Jest to piękna formuła fizyczna na liczbę pi niedostrzegana wcześniej, gdyż stałą struktury subtelnej zwykle definiuje się poprzez tzw. zredukowaną stałą Plancka (czyli *h* kreślone), w której ukryta jest podwojona liczba pi. Zatem autor tego tekstu może sobie przypisać zasługę jawnego wyrażenia liczby pi poprzez podstawowe stałe fizyczne w wyniku następującego rozumowania:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad \text{i} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}, \text{ stąd } \alpha = 2\pi \frac{e^2}{hc} \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{\alpha hc}{2\mathrm{e}^2}$$

$$\alpha \approx \frac{1}{137}, \ \alpha^{-1} \approx \ 137{,}035999679(94),$$

$$h \approx 6{,}626070040 \times 10^{-34}\, J \cdot s,$$

$$c \approx 299792458 \ m \cdot s^{-1},$$

$$e = 1{,}602176487(40) \cdot 10^{-19}\, C.$$