Czy liczba pi jest normalna?

Liczba π jest najbardziej znaną liczbą w historii. Najsławniejszą, uwielbianą, najczęściej omawianą, czczoną... Na jej cześć powstają wiersze, jest inspiracją dla kompozytorów oraz twórców filmów. Większość ludzi utożsamią ją z liczbą 3,14 co jest niezbyt dokładne.

Czy możliwe jest zapisanie tej liczby w jakimś innym systemie liczbowym, np. binarnym? Czy jest jakaś granica w poznawaniu liczby π i jej cyfr? Jak dużo wysiłku warto jej poświęcić? Pytania tego rodzaju można mnożyć. Można też postawić jeszcze jedno: czy znajomość wszystkich cyfr liczby π może być niebezpieczna?

Hippasus utopiony przez kolegów matematyków

Już w starożytności zauważono, że stosunek obwodu okręgu do długości jego średnicy, definiujący liczbę π, jest wielkością stałą. Tym niemniej dokładnej jego wartości nie udało się wyliczyć, a przez tysiąclecia nikt nie zastanawiał się nad naturą liczby π.

Pierwsze znane doniesienia „medialne" o liczbie π pochodzą z około 1650 r p.n.e.. W papirusie Rhinda można znaleźć rozważania z których wynika, że $\pi \approx 3{,}1605$. Poszukujący niepisanych dowodów świadczących o staroegipskiej wiedzy matematycznej analizowali budowle wzniesione w Egipcie. Jakież było zaskoczenie badaczy, gdy wyznaczyli stosunek sumy długości dwóch boków podstawy piramidy Cheopsa (2650 r. p.n.e.) do wysokości piramidy! Wyniósł on 3,1416 czyli przybliżenie liczby π z dokładnością do czterech miejsc po przecinku – przypadek czy wynik geniuszu?

W czasach starożytnych rozpoczął się wyścig w poszukiwaniu kolejnych cyfr dziesiętnego rozwinięcia liczby π. Kolejni badacze wiązali z tą liczbą swe życiorysy mając nadzieję na znalezienie jej wszystkich cyfr sądząc, że liczba π jest wymierna. Ponad tysiąc lat od pierwszej pisemnej wzmianki o liczbie π, w V w. p.n.e., Pitagoras i jego uczniowie dokonali prawdziwie dramatycznego odkrycia. Stwierdzili bowiem, że stosunek długości przekątnej kwadratu do długości jego boku (wynoszący $\sqrt{2}$) nie jest liczbą wymierną! To burzyło ich dotychczasowy porządek i boskie proporcje świata, który powinien (według ich wierzeń) dać się opisać liczbami wymiernymi. Pitagorejczycy postanowili trzymać w tajemnicy fakt odkrycia liczb niewymiernych, ale jeden z członków Związku Pitagorejskiego – Hippasus – zdradził ów sekret. Według legendy został za karę utopiony przez kolegów matematyków.

Tylko… dwadzieścia dwa biliony

Od tego czasu w głowach badaczy pojawiała się myśl, że nigdy nie poznamy wszystkich cyfr rozwinięcia liczby π, gdyż każdą liczbę niewymierną możemy przedstawić jedynie w postaci nieskończonego i nieokresowego rozwinięcia dziesiętnego. Walka o prawdę trwała kolejne dwa tysiąclecia! Dopiero w 1767 roku matematyk, fizyk, astronom i filozof szwajcarski Johann Heinrich Lambert udowodnił, że liczba π jest niewymierna. Ponad sto lat później, w 1882 roku, niemiecki matematyk Carl Louis Ferdinand von Lindemann zadał kolejny cios badaczom poszukującym od tysiącleci rozwiązania starożytnego problemu kwadratury koła. Udowodnił bowiem, że liczba π jest przestępna, co oznacza, że nie może być pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach wymiernych, a to było niezbędne do wykazania, że kwadratura koła jest możliwa.

Czy znajomość przybliżenia liczby π jest niezbędna? Do opisania promienia kuli wpisanej we wnętrze naszej planety wystarcza przybliżenie liczby π do 9 cyfr po przecinku.

Obliczenia takie obarczone byłyby błędem do 1 cm. Do opisania promienia kuli wpisanej w cały obserwowalny wszechświat wystarczy przybliżenie liczby π do 38 miejsc po przecinku, przy czym wartość błędu byłaby porównywalna do promienia atomu wodoru. Nadmienię tylko, że obecnie znamy ponad 22 biliony początkowych cyfr jej rozwinięcia (w krajach, które stosują długą skalę, w krajach stosujących krótką skalę mówimy o 22 trylionach cyfr) Obliczeń dokonał Peter Trueb (w roku 2016) i wskazał jej 22 459 157 718 361 początkowych cyfr rozwinięcia dziesiętnego. Można popaść w euforię! Dwadzieścia dwa biliony! Studzę atmosferę – znamy TYLKO dwadzieścia dwa biliony początkowych cyfr jej rozwinięcia – nie znamy całej reszty jej cyfr a jest ich przeliczalnie nieskończenie wiele!

Od punktu Feynmana do liczb Szymborskiej

Wydawać by się mogło, że o liczbie π wiemy już wszystko. W niespokojnych umysłach rodzą się jednak kolejne pytania! Czy cyfry 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 pojawiają się w rozwinięciu liczby π nieskończoną ilość razy? Czy cyfry pojawiają się równie często (losowość)? Czy istnieje takie miejsce w jej rozwinięciu począwszy od którego cyfra 0 pojawia się tysiąc razy pod rząd? Czy jeden milion początkowych cyfr jej rozwinięcia pojawia się w tej samej kolejności gdzieś w jej rozwinięciu (oczywiście poza początkowymi miejscami na których te cyfry stoją)?

Próbując odpowiedzieć na te pytania zauważono, że od pozycji 762 po przecinku pojawia się ciąg 999999, tzw. punkt Feynmana. Ciąg 0123456789 odkryty przez program komputerowy pojawia się w jej rozwinięciu od pozycji 17 387 594 880, natomiast ciąg 31415926 jest najdłuższym ciągiem początkowych cyfr rozwinięcia liczby π powtarzającym się w jej rozwinięciu wśród 200 000 początkowych jej cyfr rozwinięcia.

Czy liczba π kryje tajemniczy kod? Wśród stu kolejnych cyfr wziętych z jej rozwinięcia
...9389713111790429782856475032031986915140287080859904801094121472213179476477726224142548545403321571 ...
można znaleźć zakodowane daty i tak np. w 1094 roku rozpoczęto pierwszą wyprawę krzyżową do Jerozolimy, w 1117 r. Bolesław III Krzywousty skazał na oślepienie wojewodę Skarbimira, a w 1179 roku Władysław III Laskonogi razem z ojcem i starszym rodzeństwem został zmuszony na skutek buntu Kazimierza Sprawiedliwego i Odona do wyjazdu z kraju.

W podobny sposób liczbę π analizowała Wisława Szymborska. W wierszu „Liczba Pi” czytamy:

„...mój numer telefonu twój numer koszuli
rok tysiąc dziewięćset siedemdziesiąty trzeci szóste piętro
ilość mieszkańców sześćdziesiąt pięć groszy
obwód w biodrach dwa palce szarada i szyfr,..”

Dociekliwy czytelnik zada teraz pytanie czy jest związek powyższych słów z matematyką? Otóż jest!

W 1933 roku angielski matematyk i ekonomista David Gawen Champernowne, mając zaledwie 21 lat, wprowadził stałą C_{10}:=0,12345678910111213141516171819202122...
w której zapisie możemy znaleźć dowolną liczbę naturalną. Zwracam uwagą na to, że stała Champernowne jest liczbą niewymierną! W innych liczbowych systemach pozycyjnych możemy również zdefiniować takie stałe:
- w systemie binarnym C_2:=0,1101110010111011110001001...$_2$
- w systemie heksadecymalnym C_{16}:=0,123456789ABCDEF101112131415161718191A1...$_{16}$.

Obserwacja ta dała początek liczbom uniwersalnym zwanym również liczbami Szymborskiej. Liczbą Szymborskiej nazwiemy taką liczbę (danego systemu liczbowego), w której rozwinięciu znajduje się każdy możliwy skończony ciąg cyfr (danego systemu liczbowego). Stałe Champernowne są liczbami uniwersalnymi.

Małpa przy klawiaturze

Z liczbami uniwersalnymi nierozerwalnie związane są liczby normalne. Mówimy, że liczba, której rozwinięcie w danym systemie liczbowym jest nieskończone, jest normalna, gdy w jej rozwinięciu każda z cyfr tego systemu występuje z jednakową częstością, ponadto wszystkie pary cyfr tego systemu również występują z jednakową częstością i tak dalej. Stałe Champernowne są liczbami normalnymi.

Czy liczb normalnych jest na tyle dużo, że warto się nimi zajmować? Odpowiedź jest pozytywna – zbiór liczb normalnych jest równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych. Wykazano również twierdzenie mówiące o tym, że każda liczba uniwersalna jest normalna. Pojęcie liczb uniwersalnych doskonale obrazuje (matematyczne) twierdzenie o małpie z klawiaturą, a brzmi ono następująco: Przypuśćmy, że małpa wystukuje na klawiaturze symbole w sposób losowy. Jeżeli czas stukania w klawisze jest nieskończony, to małpa prawie na pewno przepisze zadany wcześniej sensowny tekst.

Oznacza to, że gdyby dać małpie do przepisania „Lokomotywę" Juliana Tuwima, to prawie na pewno przepisze ten tekst (produkując ogromne ilości innego tekstu, niemniej w pewnym momencie pojawi się cały, spójny tekst tego wiersza).

Rozumowanie prowadzące nas do takiego wniosku przeprowadzę dla nieco krótszego tekstu a mianowicie „ALA MA KOTA". Tekst ten składa się z 11 znaków. Załóżmy dla uproszczenia, że klawiatura posiada 60 klawiszy. Małpa (aby poprawnie przepisać tekst) musi wykonać 11 poprawnych uderzeń klawisza. Prawdopodobieństwo niewstukania tego tekstu w **n** próbach wynosi $\left(1-\frac{1}{60^{11}}\right)^n$ i dąży do 0, gdy n dąży do nieskończoności.

Gdyby wyposażyć małpę w klawiaturę numeryczną mogłaby przepisywać liczby. Twierdzenie mówi, że małpa prawie na pewno przepisze każdą liczbę naturalną jak również każdą liczbę składającą się ze skończonej ilości cyfr. Niemniej żadna stukająca w klawiaturę małpa nie da sobie jednak rady z liczbą π składającą się z przeliczalnej nieskończoności cyfr dziesiętnych.

Jak naruszyć wszystkie możliwe prawa autorskie

Rodzi się zatem kolejne pytanie: czy liczba π jest uniwersalna lub normalna? Liczbę π możemy rozwijać w dowolnym liczbowym systemie pozycyjnym. Znane są jej rozwinięcia w systemach binarnym i heksadecymalnym. Oto 50 pierwszych cyfr jej rozwinięcia binarnego 11,00100100001111110110101010001000100001011010001 1 oraz 50 pierwszych cyfr jej rozwinięcia heksadecymalnego 3,243F6A8885A308D313198A2E037073 44A4093822299F31D00.

Rozważając pozycyjny system liczbowy o podstawie 32 możemy zakodować wszystkie łacińskie litery (26 liter) oraz znaki : ; , . _ - (6 znaków), natomiast w pozycyjnym systemie liczbowym o podstawie 36 możemy zakodować wszystkie łacińskie litery (26 liter) oraz wszystkie cyfry albo wszystkie polskie litery wraz ze spacją. Oto pewien ciąg znaków rozwinięcia liczby π w systemie liczbowym o podstawie 32 ...h:mpoteznfdnzwfmipk_dqgz.hizgqkg_mbeep... w którym odnajdujemy skrót nazwy Wydziału Fizyki Matematyki i Informatyki Politechniki Krakowskiej. Gdyby rozwinąć liczbę π w systemie o podstawie 36 kodującym polskie litery otrzymalibyśmy wersję „literacką" liczby π!

Istnieje hipoteza, że liczba π jest normalna oraz uniwersalna. Oznacza to, że jeżeli poznacie jej pełne rozwinięcia dziesiętne, binarne, w systemie o podstawie 32 lub 36 lub jakimkolwiek innym, to naruszycie wszystkie możliwe prawa autorskie (autorów książek, kompozytorów, producentów filmów, autorów programów komputerowych...), zostaniecie oskarżeni o szpiegostwo, będziecie poszukiwani za posiadanie wszystkich numerów kart kredytowych i ich numerów PIN, a komputer, przy pomocy którego będziecie przechowywać jej cenne binarne rozwinięcie, będzie zawierał wirusy komputerowe istniejące obecnie oraz te które powstaną w przyszłości.

Można również rozwinąć liczbę π w systemie liczbowym kodującym kolory. Znajdziecie wówczas w tym rozwinięciu własne zdjęcie wraz z obecnym numerem „Naszej Politechniki" podczas czytania niniejszego artykułu.

Na koniec zadam jeszcze jedno otwarte pytanie: czy cyfry w rozwinięciu liczby π pojawiają się w sposób losowy? Stałe Champernowne są uniwersalne oraz normalne ale losowe nie są. Liczby losowe próbowano zdefiniować na wiele sposobów. Rywalizację wygrała definicja Andrieja Kołmogorowa dla którego liczba jest tym bardziej złożona, im dłuższy jest program realizujący najkrótsze obliczenia określające liczbę. Bracia Chudnovsky poddali jej cyfry wszystkim znanym testom losowości z których liczba π wyszła zwycięsko, niemniej istnieje program komputerowy złożony ze 158 znaków, który oblicza 2400 cyfr liczby π. Z kolei Y. Kanada obliczając pierwszy bilion cyfr π, sporządził statystykę wystąpień poszczególnych cyfr:

Cyfra dziesiętna	Liczba wystąpień
0	99 999 485 134
1	99 999 945 664
2	100 000 480 057
3	99 999 787 805
4	99 999 787 805
5	99 999 671 008
6	99 999 807 503
7	99 999 818 723
8	100 000 791 469
9	99 999 854 780
Łącznie	1 000 000 000 000

Rozkład cyfr nie wskazuje na brak losowości. Należy jednak pamiętać, że rozważamy tylko początkowy bilion cyfr rozwinięcia liczby π. Pomimo wysiłków wielu badaczy problem losowości liczby π pozostaje nierozwiązany. Czy będziemy czekać kolejny tysiąc lat na rozwiązanie tych problemów?

Mariusz Jużyniec

Przygotowując niniejszy tekst korzystałem z wielu ogólnodostępnych źródeł internetowych.

Dr Mariusz Jużyniec jest pracownikiem Zakładu Równań Różniczkowych i Analizy Funkcjonalnej na Wydziale Fizyki, Matematyki i Informatyki PK.
Artykuł jest przygotowaną przez autora dla „Naszej Politechniki" wersją referatu wygłoszonego 14 marca podczas Dnia Liczby Pi na Politechnice Krakowskiej. Śródtytuły pochodzą od redakcji.